TD n°9 : CORRECTION

Algèbre linéaire : Espaces Euclidiens. .

Exercice 1 Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de la forme $aX^2 + bX + c$. On définit pour $P \in E$, $Q \in E$:

$$< P|Q >= \int_0^1 P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$$

a) Montrer que cela définit un produit scalaire sur E.
b) Déterminer une base orhonormale (P_0, P_1, P_2) de E (avec P_k de degré k).

a) Définition.

b) On utilise l'algorithme de Gram-Schmidt.

Algorithme de Gram-Schmidt :

- $w_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$
- Pour k de 2 à n, on calcule
  - $\boxed{w_k = \frac{y_k}{\|y_k\|}}$ avec :
  - $\boxed{y_k = e_k - \sum_{j=1}^{k-1} < e_k, w_j > w_j}$

$B = (1, X, X^2)$

- $w_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \boxed{1}$
- $y_2 = e_2 - < e_2, w_1 > w_1 = x - \left(\int_0^1 x.1\,dx\right)1 = x - \frac{1}{2}$
- $w_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = \frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 dx}} = \frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{1/12}} = \boxed{\sqrt{3}\,(2x-1)}$
- $y_3 = e_3 - < e_3, w_1 > w_1 - < e_3, w_2 > w_2 = x^2 - < x^2, w_1 > w_1 - < x^2, w_2 > w_2$
  $y_3 = x^2 - x + 1/6$
- $\boxed{w_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|} = \sqrt{5}\,(6x^2 - 6x + 1)}$

Exercice 2 Soit E un espace euclidien. α est un réel. On suppose que a, b et c sont trois vecteurs unitaires tels que

$$< a|b >=< a|c >=< b|c >= \alpha$$

a) Montrer que $-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$. (On pourra introduire le vecteur $u = a + b + c$).
b) Montrer que (a, b, c) est libre si et seulement si $-\frac{1}{2} < \alpha < 1$

a)

- Par C-S, $\alpha = |< a, b >| \leq \|b\|.\|b\| = 1$
- $\|u\|^2 = 3(2\alpha + 1) \geq 0$

Donc $\boxed{-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1}$

b)

Soit $xa + yb + zc = 0$

En appliquant successivement <a,.>, <b,.>, <c,.>, on obtient

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Or $det(A) = (2\alpha + 1)(1 - \alpha)$

- si (a,b,c) libre, detA non nul donc α diférent de -1/2 et 1 et d'après a) $-\frac{1}{2} < \alpha < 1$
- si $-\frac{1}{2} < \alpha < 1$, alors detA non nul et donc (a,b,c) libre.

Exercice 3 Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Soit F le plan vectoriel défini par l'équation $x+y+z=0$.
a) Déterminer une base orthonormale de F.
b) Déterminer $F^\perp$ et en donner une base orthonormale.
c) Déterminer le projeté sur F du vecteur $a=(1,2,5)$.
d) Soit p la projection orthogonale sur F. Déterminer la matrice de p dans la base canonique.
e) Soit s la symétrie orthogonale par rapport à F. Déterminer la matrice de s dans la base canonique.

a)

- $F = Vect\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\} = Vect(f_1, f_2)$
- **Algo..**
  - $w_1 = \dfrac{f_1}{\|f_1\|} = \boxed{\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}}$
  - $y_2 = f_2 - < f_2, w_1 > w_1 = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$
  - $w_2 = \dfrac{y_2}{\|y_2\|} = \boxed{\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{3}\\-\frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}}$

$$\boxed{F = Vect\left\{\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{3}\\-\frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}\right\} = Vect(w_1, w_2)}$$

b)

$$F^\perp = \{X \in E \text{ tels que } \forall f \in F, < X, f > = 0\}$$

Il faut donc que X vérifie : $\begin{cases} < X, w_1 > = 0 \\ < X, w_1 > = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}z = 0 \\ -\dfrac{\sqrt{6}}{6}x + \dfrac{\sqrt{6}}{3}y - \dfrac{\sqrt{6}}{6}z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

$$\boxed{F^{\perp} = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}$$

BON de $F^{\perp}$ est $\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

c)

$$\boxed{p(a) = < a, w_1 > w_1 + < a, w_2 > w_2}$$

$$\boxed{p(a) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}}$$

d)

$$\boxed{A = Mat_{(e_1,e_2,e_3)}(p) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

On vérifie que $A^2 = A$ ce qui caractérise une projection, qu'elle soit orthogonale ou non.

e)

$$\boxed{s(x) = 2p(x) - x}$$

$$\boxed{B = Mat_{(e_1,e_2,e_3)}(s) = 2A - Id = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

Exercice 4 Montrer que les matrices suivantes sont orthogonales. Décrire l'endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ associé.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\boxed{Si\ \boldsymbol{det\,f} = \mathbf{1}}$ f isométrie directe (donc rotation)

  f est une **rotation par rapport à une droite vectorielle $\vec{\boldsymbol{D}}$.**
  - $\vec{\boldsymbol{D}}$ est l'ensemble des invariants de f , déterminée par résolution de AX=X
  - **L'angle t** est déterminé par :
    - $tr(A) = 1 + 2cos\ t$
    - sin t est du signe du produit mixte $[x, f(x), u] = \det_{(i,j,k)}\ (x, f(x), u)$ pour x non colinéaire à u , et u le vecteur normé dirigeant et orientant l'axe $\vec{D}$

$$Mat_{(u,v,w)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} : \text{rotation}$$

$$pour\ u,v,w\ normés, \vec{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{vect}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{u}\ et w = u \wedge v$$

- $\boxed{Si\ \boldsymbol{det\,f} = \mathbf{-1}}$ f iso. ind. (réflexion/plan ou composée ($symétrie\ o\ rotation$))
  - <u>**Si A symétrique**</u> : f est une **symétrie orthogonale / plan $\vec{\boldsymbol{P}}$**
    - det A= - 1 et A≠-Id donc f réflexion /P
    - $\vec{\boldsymbol{P}}$ est l'ensemble des invariants de f , dét. par résolution de $\boxed{AX = X}$

$$Mat_{(u,v,w)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} : \text{symétrie}$$

$$pour\ u,v,w\ normés, \vec{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{vect}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{w} \perp \vec{\boldsymbol{P}}$$

  - <u>**Si A non symétrique**</u> :

    f est la **composée commutative d'une rotation $\boldsymbol{Rot}(\vec{\boldsymbol{D}}, \boldsymbol{t})$ et d'une réflexion $\boldsymbol{Ref}(\vec{\boldsymbol{P}})$ avec $\vec{\boldsymbol{P}} \perp \vec{\boldsymbol{D}}$**
    - $\vec{\boldsymbol{D}}$ est caractérisé par les X tels que $\boxed{AX = -X}$
    - **L'angle t** est déterminé par :
      - $tr(A) = -1 + 2cos\ t$

- sin t est du signe de $[x, f(x), u] = \det_{(i,j,k)}\ (x, f(x), u)$
  pour x non colinéaire à u ,et u le vecteur normé dirigeant et orientant l'axe $\vec{D}$

$$Mat_{(u,v,w)}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$pour\ u,v,w\ normés, \vec{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{vect(u)}, \boldsymbol{v}\ \perp \boldsymbol{u}\ et w = u \wedge v$$

1°)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- ${}^tAA = Id$, donc f isométrie.
- det A=1 donc A est la matrice d'une rotation
- $t = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

2°)

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- ${}^tBB = Id$, donc f isométrie.
- det B=- 1 donc B est la matrice d'une symétrie orthogonale / $\vec{\boldsymbol{D}}$
- $t = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ donc la droite vectorielle $\vec{\boldsymbol{D}}$ **est d'angle polaire** $\boxed{-\frac{\pi}{6}}$

3°)

$$C = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

- ${}^tCC = Id$, donc f isométrie.
- det C=1 donc C est la matrice d'une rotation.
- $t = -\arccos\left(\frac{3}{5}\right)\ [2\pi]$

4°)

$$D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- ${}^tDD = Id$, donc f isométrie.
- det D=- 1 donc D est la matrice d'une isométrie indirecte (réflexion/plan ou composée symétrie o rotation).
- **D symétrique** : f est une **symétrie orthogonale / plan $\vec{P}$**
  - det D= - 1 et D≠-Id donc f réflexion /P
  - $\vec{P}$ est l'ensemble des invariants de f , déterminée par résolution de DX=X.

$$\vec{P} = SEP(D,1) = Vect\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}, \qquad \text{vecteurs normés}$$

5°)

$$E = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- ${}^tEE = Id$, donc E est la matrice d'une isométrie.
- **det E = 1** e est la matrice d'une isométrie directe (donc rotation)
  f est une **rotation par rapport à une droite vectorielle $\vec{D}$.**
  - <u>$\vec{D}$ est l'ensemble des invariants de f , déterminée par résolution de EX=X.</u>

$$\vec{D} = SEP(E,1) = Vect\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = Vect(u), \qquad \text{vecteur normé}$$

  - <u>L'angle t est déterminé par</u> :
    - $\mathrm{tr}(E) = 1 + 2\cos t = 0$, donc $\boxed{t = \pm\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]}$
    - sin t est du signe du produit mixte $[i, f(i), u] = \det_{(i,j,k)}\ (i, f(i), u)$
      on a $\vec{\imath}$ non colinéaire à u , et u le vecteur normé dirigeant et orientant l'axe $\vec{D}$

$$\det_{(i,j,k)}\ (i, f(i), u) = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$$

f est une **rotation par rapport à une droite vectorielle $\vec{D}$, dirigée et orientée par** $\boxed{u = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}$

et d'angle $\boxed{t = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi].}$

Exercice 5 On considère les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que A et B sont deux matrices orthogonales.
b) Montrer que A et B sont des matrices de rotation, dont on déterminera les angles et les axes.
c) Soit la matrice $C = AB$. Calculer C. Montrer qu'il s'agit d'une matrice de rotation dont on précisera l'angle et l'axe.

a) ${}^tAA = Id = {}^tBB$, donc A et B sont orthogonales.

b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ${}^tAA = Id$, donc f isométrie.
- **det f = 1** f isométrie directe (donc rotation)

  f est une **rotation par rapport à une droite vectorielle $\vec{D}$.**
  - <u>$\vec{D}$ est l'ensemble des invariants de f , déterminée par résolution de AX=X.</u>

    $\vec{D} = SEP(A,1) = Vect\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = Vect(k),$ vecteur normé

  - <u>**L'angle t** est déterminé par</u> :
    - tr(A) = 1 + 2cos t = 1, donc $\boxed{t = \pm\frac{\pi}{2}\ [2\pi]}$
    - sin t est du signe du produit mixte $[i, f(i), k] = \det_{(i,j,k)}\ (i, f(i), k)$

      on a $\vec{\imath}$ non colinéaire à k , et k le vecteur normé dirigeant et orientant l'axe $\vec{D}$

$$\det_{(i,j,k)}\ (i, f(i), k) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

f est une **rotation par rapport à une droite vectorielle $\vec{D}$, dirigée et orientée par** $\boxed{k = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}$

et d'angle $\boxed{t = \frac{\pi}{2}\ [2\pi].}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- ${}^tBB = Id$, donc g isométrie.
- **det g= 1** g isométrie directe (donc rotation)

  g est une **rotation par rapport à une droite vectorielle $\overrightarrow{D}$.**
  - <u>$\overrightarrow{D'}$ est l'ensemble des invariants de g, déterminée par résolution de BX=X.</u>

    $\overrightarrow{D'} = SEP(B,1) = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = Vect(i)$, vecteur normé

  - <u>**L'angle t** est déterminé par</u> :
    - $\mathrm{tr(B)} = 1 + 2\cos t = 1$, donc $\boxed{t = \pm\frac{\pi}{2}\ [2\pi]}$
    - sin t est du signe du produit mixte $[j, g(j), i] = \det_{(\mathrm{i,j,k})}\ (j, g(j), i)$

      on a $\vec{\jmath}$ non colinéaire à i , et i le vecteur normé dirigeant et orientant l'axe $\overrightarrow{D'}$

$$\det_{(\mathrm{i,j,k})}\ (j, g(j), i) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

g est une **rotation par rapport à une droite vectorielle $\overrightarrow{D'}$, dirigée et orientée par** $\boxed{\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}}$

et d'angle $\boxed{\boldsymbol{t = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]}.}$

c)

$$C = AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- ${}^tCC = Id$, donc h isométrie.
- **det h= 1** h isométrie directe (donc rotation)

  hest une **rotation par rapport à une droite vectorielle $\overrightarrow{D''}$.**
  - <u>$\overrightarrow{D''}$ est l'ensemble des invariants de h, déterminée par résolution de BX=X.</u>

    $\overrightarrow{D''} = SEP(C,1) = Vect\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} = Vect(u)$, vecteur normé

  - <u>**L'angle t** est déterminé par</u> :

- $\mathrm{tr(C)} = 1 + 2\cos \mathrm{t} = 0,$ donc $\boxed{t = \pm\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]}$
- sin t est du signe du produit mixte $[i, h(i), u] = \det_{(\mathrm{i,j,k})}\ (i, h(i), u)$

  on a $\vec{\imath}$ non colinéaire à u , et u le vecteur normé dirigeant et orientant l'axe $\overrightarrow{D''}$

$$\det_{(\mathrm{i,j,k})}\ (i, h(i), u) = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{3}} < 0$$

h est une **rotation par rapport à une droite vectorielle $\overrightarrow{D''}$, dirigée et orientée par** $\boxed{\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

et d'angle $\boxed{\boldsymbol{t} = -\frac{2\pi}{3}\ [\boldsymbol{2\pi}].}$

Exercice 6
Pour chacune des matrices symétriques réelles suivantes, précisez une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $A = PDP^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 8 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Les matrices sont symétriques réelles donc sont diagonalisables dans une BON d'après le théorème fondamentale.
- On sait en outre que Les SEP pour f symétrique sont orthogonaux entre eux.
- Soit f symétrique, alors pour tout sev F stable par f, $F^{\perp}$ stable par f.

- $\chi_A(x) = x^2 - 3x - 2$
- $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{-2; 3\}$
- $SEP(A, -2) = Vect\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ on prend $v1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $SEP(A, 3) = Vect\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ on prend $v2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- A diagonalisable, $A = PDP^{-1}$, avec P orthogonale, $P = (v1, v2)$ Et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

- $Sp_{\mathbb{R}}(B) = \{0; 5; 9\}$
- $SEP(B, 0) = Vect\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ on prend $v1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $SEP(B, 5) = Vect\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ on prend $v2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $SEP(B, 9) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ on prend $v2 = \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$
- B diagonalisable, $B = PDP^{-1}$, avec P orthogonale,

$$P = (v1, v2, v3) \quad \text{Et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

- $\chi_C(x) = -(x-1)(x-2)(x-4)$
- $Sp_{\mathbb{R}}(C) = \{1; 2; 4\}$
- $SEP(C, 1) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ on prend $v1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $SEP(C, 2) = Vect\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ on prend $v2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $SEP(C,4) = Vect\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ on prend $v2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$
- C diagonalisable, $C = PDP^{-1}$, avec P orthogonale,

$$P = (v1, v2, v3) \quad \text{Et} \quad D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$